

# 動摩擦力的作功與熱傳分析

Bruce Arne Sherwood,\* W. H. Bernard,† and 高英倫 (翻譯者) ‡

(Dated: 8 February 1984)

本篇文章是在獲得美國物理期刊 (American Journal of Physics) 與 Bruce Sherwood 教授的授權之下，進行翻譯並公開發佈。正文開始：動摩擦力所作的功往往被錯誤地計算。正確的處理之道，就在於釐清牛頓第二定律的純力學積分，以及所謂的熱力學第一定律。對單質點系統而言，這兩條方程式是相同的。但是，對可形變系統而言——尤其是受動摩擦力作用的系統——則是不同的。在提出獨立於微觀摩擦模型的理論計算後，我們也將此計算結果應用至現今的摩擦理論模型中，並探討其結果。此外，這篇文章也提供了滾動摩擦，以及潤滑摩擦之熱傳現象的詳細作法。並給出能量方程式的不變形式 (本文刊登於美國物理學刊 American Journal of Physics 的原始連結：<http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.13775>)。

## I. 悖論

在處理動摩擦的功與能量問題的傳統作法中，存在著一個明顯的悖論。讓我們假設桌上有個物體被向前等速拖行。其中，特地施加於物體上的應力為  $f$ ，其位移為  $d$ ，因此這外力對物體作了  $fd$  的功。因為物體作等速運動，所以其受到的摩擦力  $\mu N$  量值等同於應力  $f$ 。因此，動摩擦力對物體似乎作了  $-\mu Nd = -fd$  的功。進一步而言，作用於物體上的總功為  $fd - fd = 0$ 。倘若物體是所謂的單質點，那麼此合外力作功即為其動能的變化。

$$fd - fd = 0 = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv^2 \right) \quad (1)$$

這證明了物體速率並不會改變。因此，這與先前的等速運動條件一致，所以上述做法看起來似乎沒什麼問題。

然而，在此系統為多質點物體——而不是單質點——的例子中，卻出了一個問題。用以表示物體內能增加的那一項究竟在哪裡呢？由於摩擦的緣故，木塊溫度升高了，而且，也可經由熱量計測量出物體的内能增加量。雖然上述作法確實算出物體的速度變化，但功能定理方程式並不包含代表系統主要能量變化的那一項——內能的變化。事實上，這悖論是能夠被破解的，於此同時，我們也會對摩擦現象有更深刻的理解。在第八節，這個新的方法能夠用以處理常見的摩擦力習題，並由此了解，大部分參考書的傳統作法並不是正確的作法。

## II. 質心方程式

解決這悖論的關鍵就在於釐清——基於歷史因素而被稱為熱力學第一定律的——真正的能量方程式，以

及“假功能”方程式 (“pseudowork-energy” equation)，或者“質心”方程式 (CM equations) [1][2][3]。質心方程式是牛頓第二定律對質心位移做空間積分所得到的：

$$\sum_i F_{i,\text{external}} = Ma_{\text{CM}} \quad (2a)$$

$$\int \left( \sum_i F_{i,\text{external}} \right) \cdot dr_{\text{CM}} = M \int \frac{dv_{\text{CM}}}{dt} \cdot dr_{\text{CM}} \quad (2b)$$

$$\int \left( \sum_i F_{i,\text{external}} \right) \cdot dr_{\text{CM}} = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{\text{CM}}^2 \right) \quad (2c)$$

上述這條質心方程式使人覺得這非常像是能量方程式，但它僅僅與質心的物理量有關，而不包含轉動、振動或諸如熱能、化學能等的非力學形式的能量。我們也能僅針對牛頓第二定律的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分量做出如上推導，並使其總和恰為質心方程式。這三條分量方程式的有效性足以說明，質心方程式並不是真正的能量方程式，而僅僅是與動量密切相關的方程式。

當位於桌上的物體被向前等速拖行時，物體移動的距離為質心的位移  $d_{\text{CM}}$ ，並且，此運動過程的質心方程式為

$$(f - f)d_{\text{CM}} = 0 = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{\text{CM}}^2 \right) \quad (3)$$

這條質心方程式與此過程的牛頓第二定律完全相同， $(f - f) = 0 = Ma_{\text{CM}}$ ，而這也證明了質心作等速運動。解決此悖論的一個起點，就是認知到，我們原先以為是能量方程式的式子其實僅僅是質心方程式。

因為這源自只有力學考量的牛頓第二定律，所以滑動物體的質心方程式並不具有任何關於物體熱能變化的方程式，也不具有物體與外界間可能的熱傳資訊。為了描述滑動過程的這些面向，我們必須使用熱力學第一定律 (the First Law of Thermodynamics)，底下我們將之簡寫為 FLT。質心方程式與熱力學第一定律共同完整地描述了它們各自所無法單獨描述的滑動過程。

緊接著會仔細研討具有高度對稱性的情況。這能給出完全獨立於、適用於任何滑動模型的驚人結論。此外，特殊的摩擦模型也會被用以闡明這特殊的無關乎任何模型的結果究竟是怎麼來的。

\* Computer-based Education Research Laboratory, Departments of Physics and Linguistics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois 61801

† Department of Physics, Louisiana Tech University, Ruston, Louisiana 71272

‡ 並非作者，只是獲得 Sherwood 教授與 AJP 的翻譯授權。畢業於台灣大學物理學系與化學工程學系，即將就讀台灣大學電子工程學研究所，現為全職物理家教。個人網站：[www.ethanideas.url.tw](http://www.ethanideas.url.tw) 電子信箱：[k0185123@hotmail.com](mailto:k0185123@hotmail.com)

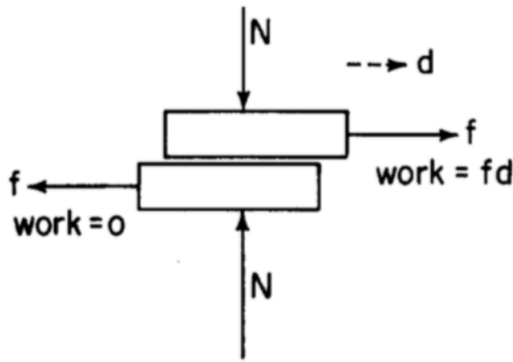


FIG. 1. 兩個互相受動摩擦作用且等速滑行的相同物體。以下方木塊的慣性參考系來看，左側所施的力並沒有作功，而作用於右側的力確實作了  $fd$  的功。鉛直的力量是由絕熱之滾棒造成的。此外，假設此系統位於遙遠的太空深處，使得任何可能的萬有引力影響趨於零。

### III. 適用於任何模型的計算方法

考慮非常單純並具有高度對稱性的情境。設想兩個相同的物體被向左右拖拉，以等速度滑行過彼此（圖一）。為了達到絕對的對稱性，假設實驗是在遙遠的、遠離任何重力源的外太空所執行的，並藉由兩物體外表面的絕熱滾棒維持它們之間的正向力。進一步而言，假設它們各自的位移都遠小於物體的長度（或者說，物體的長度非常長），以至於所有物理條件幾乎不會改變（例如，接觸面積）。或者，我們也可設想兩個完全相同且互相重疊的圓環，以確保各種力學條件不隨時變化。

我們選擇與下方物體一起運動的參考系來觀察，使得下方物體在此慣性參考系是靜止的。接著，將這兩個物體視為接下來要被分析的系統。當上方物體向右移動  $d$  時，系統質心即向右移動  $d/2$ 。雖然下方物體靜止不動使得作用於其上的外力  $f$  並不作功，但此外力  $f$  卻會出現在質心方程式中：

$$CM : (f - f)(d/2) = \Delta \left[ \frac{1}{2}(2m)v_{CM}^2 \right] = 0, \quad (4a)$$

$$FLT : fd = \Delta E_{\text{thermal, upper and lower blocks}} \quad (4b)$$

質心方程式是顯而易見的，並沒什麼好驚奇的（因為質心作等速運動，所以  $0 = 0$ ）。然而，熱力學第一定律則證明了外力所作的功進而加熱兩物體。根據對稱性，有一半的熱能增加量會出現在上方物體中。熱量計能測量到上方物體  $fd/2$  的熱能變化量（假設所有的功最後都轉為熱擾動作用）。

值得注意的是，質心方程式與熱力學第一定律的差別是源自於雙物體系統是可形變系統（deformable system）。各個力量所作的功與每個力量之接觸點的位移有關。作用於上方物體的力量移動距離為  $d$  並作了  $fd$  的功。另一方面，作用於下方物體的力量並沒有位移，所以並不作功。然而，在質心方程式中，每個力量都乘以相同的質心位移。如此的差異情形也發生在轉動系統中。例如，考慮一個於斜面作純滾動下滑的圓柱體。雖

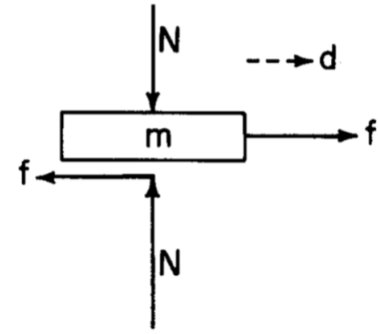


FIG. 2. 上方物體的力圖。作用於右側的外力作  $fd$  的功，但向左施力的摩擦力僅僅做了  $-fd_{\text{eff}}$  的功，並且  $d_{\text{eff}}$  小於  $d$ 。

然摩擦力會出現在質心方程式中，但不會出現在熱力學第一定律中，因為接觸點並沒有移動。換句話說，如果系統具有能夠使內能產生變化的內在結構（由那些會造成形變與轉動的力量，或者是其他種能量傳遞所造成的變化），那麼我們就能說質心方程式與熱力學第一定律的方程式必然是截然不同的。讀者可於第十節看見相關的討論。

接著，僅僅選擇上方物體為系統（圖二）。為了避免模糊不清，我們所選的系統是組成上方物體的所有原子的系統，並且，為了簡化問題，我們假設沒有任何一個原子被摩擦至脫離物體的程度。依據繪製力圖的規則，將上方物體作為系統是個合理的選擇。上方物體的方程式即為：

$$CM : (f - f)d = \Delta \left( \frac{1}{2}mv_{CM}^2 \right) = 0, \quad (5a)$$

$$FLT : fd - fd_{\text{eff}} = \Delta E_{\text{thermal, upper block}} = fd/2. \quad (5b)$$

再一次地，因為物體是作等速度運動，所以質心方程式並沒什麼值得注意的地方。

然而，此時的熱力學第一定律就滿特別的了。作用於物體右側的力量  $f$  作了  $fd$  的功。向左作用於上方物體的動摩擦力則作了  $-fd_{\text{eff}}$  的功，待會這個動摩擦力經歷的等效位移  $d_{\text{eff}}$  會帶給我們一些出乎意料的感受。外界作的所有的功都只轉換成上方物體的熱能，並且，因為這兩個物體所獲得的總能量是  $fd$ ，所以我們知道上方物體的熱能增加量就是  $fd/2$ 。因為這兩個物體是完全相同的，所以這兩物體之間沒有任何熱傳現象：根據對稱性，由下往上的熱傳遞，應該等同於由上往下的熱傳遞。

如果我們藉由熱力學第一定律解出有效位移  $d_{\text{eff}}$ ，我們會發現

$$d_{\text{eff}} = d/2 (!!)$$

這如何可能呢？雖然現在的具有高度對稱性的情境與摩擦理論模型沒有關係，但我們仍能透過乾燥摩擦的標準理論了解這個令人感到出乎意料的結果[4][5]。

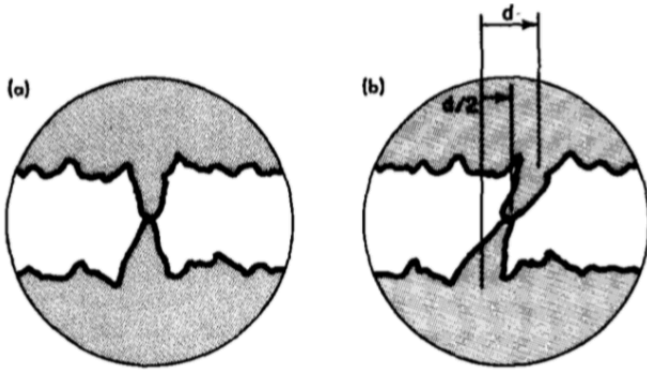


FIG. 3. (a) 摩擦現象的理論模型放大示意圖，鉛直方向放大比例遠大於水平方向放大比例。上下金屬塊的突牙在其接觸點產生銲接現象。此時的接觸剪力即為摩擦力的由來。(b) 雖然上方金屬塊向右移動  $d$  的距離，但接觸點只移動  $d/2$  的距離。摩擦力  $f$  作了  $-fd/2$  的功。

#### IV. 乾燥摩擦

根據 Bowden 與 Taylor 的乾燥摩擦模型[4][5]，當一個金屬塊在金屬表面上滑行時，金屬塊只會被三個突牙 (protruding teeth) 撐著。在關於摩擦的文獻中，這又被稱為平坦表面之突點 (asperities)。這些突牙所承受的極高壓力會產生塑性變形 (plastic yield)。並且，滑動過程中的高溫會在接觸區域產生黏著銲接 (adhesion welding)。每單位面積的摩擦力對應至足以破壞這些銲接現象的剪力。這個接觸銲接的剪力作用是乾燥金屬於相同金屬表面上滑行時的主要摩擦機制。

因為突牙尖點 (tooth tips) 比那些因加工硬化 (work-hardening) 而來的金屬還要堅硬，所以剪切現象往往發生在離突牙尖點比較遠、比較脆弱的區域。以上即為兩個同樣的金屬快互相摩擦時會發生的效應，一小塊金屬脫落並黏著道另一大塊金屬表面上。不過，我們往往忽略這個附著效應 (wear)。對於相同的物體來說，這是個具有對稱性的效果。如果金屬表面有氧化物，那麼這就能減少用以破壞暫態銲接的剪應力，並且，如果有氧化物的接觸面是最脆弱的區域，那麼這也能避免金屬剝落的現象。

在約略說明由 Bowden 與 Taylor 的乾燥摩擦模型之後，我們接著使用這個模型，計算位於接觸點上的摩擦力所作的功。

圖三(a)以乾燥模型之摩擦理論顯示出兩個暫時黏著在一起的突牙。其中，鉛直長度被放大數倍。如果是磨光的表面，那麼接觸面勢必會更加平緩。從圖三(b)即可理解先前的  $d/2$  等效位移：當上方木塊向右移動  $d$  距離時，因為這兩個金屬塊是由完全相同的金屬所構成的，所以上下兩木塊之接觸點只向右移動  $d/2$  的距離。雖然此接觸力的時間平均值確實是  $f$  (如  $f - f = Ma_{CM}$  所表示的)，但是摩擦力的有效位移只有上方金屬塊之質心位移的一半。

一旦互相接觸的兩突牙銲接被破壞了，這兩個突牙就

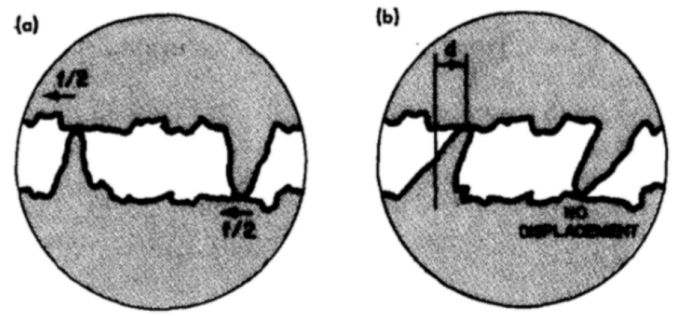


FIG. 4. (a) 這是比較真實的摩擦情境。圖中的兩個突牙代表著相同金屬塊，對於時間與空間取其平均後的接觸情形。摩擦力  $f$  被分為兩等份。有  $f/2$  作用於上方金屬塊的接觸點，而另外  $f/2$  則是作用於下方金屬塊的接觸點。(b) 上方金屬塊向右移動  $d$  的距離，所以上方的接觸點也同樣向右移動  $d$  的距離，但下方接觸點並沒有移動。因此，下方金屬塊作用於上方金屬塊的功即為  $-(f/2)(d) - (f/2)(0) = -fd/2$ 。

能夠產生振動現象。上方木塊的突牙振動以及從較高溫的突牙尖點向上傳遞至金屬塊主體的熱傳導現象，共同使得上方木塊增加了  $fd/2$  的熱能。同樣地，下方木塊的突牙振動與熱傳導現象最終也提升了  $fd/2$  的熱能。

不過，兩個有著圖三接觸狀況的突牙是有點不切實際的，比較可能的情形應該是圖四(a)所呈現的模樣。藉由圖四(a)，我們說明了上方金屬塊的最長的突牙與下方金屬塊的較平坦的表面接觸的情形，以及下方金屬塊的最長的突牙以同樣地方式與上方金屬塊接觸的情形。此處的兩個突牙所代表的是滑動摩擦的時間與空間平均。作用於上方金屬塊的摩擦力  $f$  可平均為兩個量值皆為  $f/2$  並作用於兩組最長之突牙的力量。從圖四(b)可以了解到，當上方金屬塊向右移動  $d$  的距離時，上方的接觸點也同樣向右移動  $d$  的距離。然而，下方接觸點卻沒有任何移動。因此，摩擦力所作的功就是  $(-f/2)(0) + (-f/2)(d)$ ，也就是說， $-fd/2 = -fd_{\text{eff}}$ 。所以，我們又再一次得到  $d_{\text{eff}} = d/2$  的結論。

一個常見的錯誤就在於將上方物體的質心方程式， $fd - fd = 0$ ，誤認為熱力學第一定律的方程式， $fd - fd_{\text{eff}} = fd/2$ 。此時，質心方程式的缺陷就在於它與功或能量沒有任何的關係。更進一步而言，質心方程式真的與熱能毫無關係。但是，每個人在知道物體越來越熱的情形下，也同時在想著為什麼如此這般的物理事實沒有反應在 (質心) 方程式中。值得注意的是，因為此時的物體並不是單質點系統，而是可形變的系統，所以此系統的質心方程式與熱力學第一定律方程式是截然不同的。也就因為這是可形變系統，所以各個力量的作用點位移並不必然相同。在質心方程式中，所有的力量都乘上相同的質心位移，但是在熱力學第一定律中，每個力量所貢獻的功僅僅與自身的作用點位移成正比。

另一方面，如果在兩物體的質心坐標系處理這些分析，而不是在下方物體的座標系來分析，那麼這其實還滿有教育意義的。以時間平均來說，於質心坐標系下觀察到的摩擦力接觸點是沒有移動的，所以  $d_{\text{eff}} = 0$ 。然

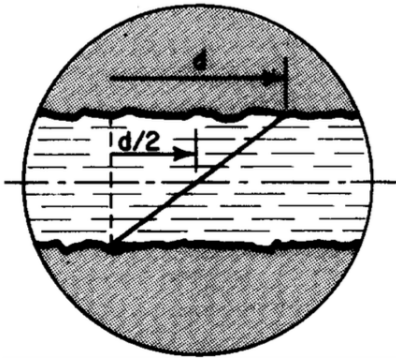


FIG. 5. 位於兩物體間的黏稠潤滑油。以下方物體為靜止參考系的拖曳層流 (Couette laminar flow) 剖面圖。考慮一個由上方物體與上半部的潤滑油組成的系統。作用於此系統下方的流體剪力的作用位移，恰好是上方物體移動距離的一半。

而，兩外力都移動了  $d/2$  的距離。以兩物體為系統來說，每個外力  $f$  都貢獻了  $fd/2$  的功，並且總功  $fd$  等同於兩物體所增加的熱能。如果我們只考慮上方物體，那麼外力所作的功為  $fd/2$ ，並且摩擦力不作功（因為作用點沒有位移）。因此，上方物體所受的總功  $fd/2$  等同於上方物體的熱能增加量  $fd/2$ 。

以圖三的模式示意圖為例。也許，我們會理所當然地認為，有效位移  $d_{\text{eff}} = d/2$  應該比物體的質心位移 ( $d$ ) 還要少。然而，如果我們在上方金屬塊的（靜止）座標系去分析這些現象，那麼由下方金屬塊所作用的摩擦力的接觸點就會經歷一個不為零的位移 ( $d/2$ )，於此同時，上方金屬塊卻完全沒有移動。另一個更有趣的例子是從運輸帶上靜止加速的物體。在物體到達運輸帶的速度之前，動摩擦力對物體都是作正功，並且摩擦力作用點移動的距離必然比物體移動距離還要大。而其箇中原因就在於，為了讓物體加速，摩擦力作用點必須比物體移動得還要快。

## V. 潤滑摩擦

對於經歷具有高度對稱性的運動過程的兩個物體而言， $d_{\text{eff}} = d/2$  的結果是適用於任何摩擦模型的。雖然如此，我們仍希望可以在潤滑摩擦的情況中，得到完全相同的結果。圖五表示隔著一層黏稠潤滑油而沒有互相接觸的兩個物體。這兩個物體的運動因此流體層而互相分配。以拖曳層流為例，剖面圖中的油性流體的位移是線性位移。

基於對稱性的考量（這能避免於此系統邊界有熱傳遞的可能），我們將上方物體與上半部的潤滑油作為系統的上半部。我們會發現，作用在這層流體中介面的剪力行經了上方物體位移的一半： $d_{\text{eff}} = d/2$ 。這與我們先前不考慮摩擦模型的計算結果，以及乾燥摩擦模型的計算結果是一致的（亦即 Bowden-Tabor 模型）。當然，摩擦力的大小因潤滑油而被大幅減少了。因此，倘若物體沒有加速度，那麼外界施加的應力就必須小得許多。如果我們以兩物體的質心作為參考系，那麼此潤滑油的中介面就是靜止不動的。上方物體將移動  $d/2$  的距離，並

且外界施加的應力  $f$  會作  $fd/2$  的功。然而，摩擦力此時並不作功（因為中介面並沒有移動； $d_{\text{eff}} = 0$ 。作用於上方系統的總功即為  $fd/2$ ，這就是它的熱能增加量。

## VI. 熱傳導分析

在潤滑摩擦的例子中，我們能夠更進一步了解所謂的熱傳現象。以先前的兩物體間夾有潤滑油的情境為例。為了簡化問題，假設兩物體是導熱性遠遠優於潤滑油的兩金屬塊，因此，兩金屬塊的溫度是均勻分布，並隨著滑動摩擦而持續升溫。此外，我們也假設金屬塊的質量遠大於潤滑油的質量，以致於幾乎沒有能量流進潤滑油中——所有產生的熱能都在兩金屬塊內（每個金屬塊獲得  $fd/2$  的熱能）。接著，我們就能了解作用於上方系統的摩擦作功 ( $W_{\text{fric}}$ ) 與流進上方系統的熱傳遞 ( $Q$ ) 與上方系統邊界之  $y$  座標的關係， $y$  座標是從潤滑油中介面向上計算的位置。以兩物體質心為參考系。在對稱的例子中， $y = 0$ ，並且  $W_{\text{fric}} = 0$ 、 $Q = 0$ 。上方物體移動  $d/2$  的距離，並且外力  $f$  作了  $fd/2$  的功。因此，流進上方系統的能量是  $fd/2$ ，使得上方金屬塊獲得  $fd/2$  的熱能。

圖六(a)顯示溫度  $T$  對  $y$  的函數圖，而最高溫度就位於潤滑油中介面的位置。圖六(b)顯示熱傳導  $Q = (-kA \partial T / \partial y) \times (\text{時距})$  對  $y$  的函數圖（潤滑油厚度為  $t$ ，所以  $-t/2 < y < +t/2$ 。在剪力分佈均勻的情況中，流體的熱耗散也是均勻分布的，所以熱傳導圖形（圖六(b)）是一條直線，因而使溫度分布圖（圖六(a)）成為一條拋物線。因為  $Q$  總是正比於溫度的負導數，所以圖六(b)中的曲線為圖六(a)曲線的負導數。

值得注意的是，在中介面時， $\partial T / \partial y$  為零，所以該處沒有任何熱傳導現象，也就具有所謂的對稱性。對  $y > 0$  的區域而言，熱傳導是正的，也就是說，有能量藉由熱交互作用傳遞至上方系統中。對  $y < 0$  的區域而言，熱傳導是負的，這反應出有能量藉由熱交互作用流出上方系統，並流入下方的潤滑油與金屬塊中。

圖六(c)顯示流進上方系統的所有能量與  $y$  位置——也就是系統邊界位置——的函數圖形。在  $y = +t/2$  的位置，因為摩擦力向左作用，但位移是向右  $d/2$ ，所以  $W_{\text{fric}} = -fd/2$ 。而在  $y = +t/2$  時，因為兩金屬塊的  $fd$  熱能增加量源自於潤滑油，所以  $Q$  必然是  $fd/2$ 。在  $y = -t/2$ ，對上方系統作用的摩擦力  $f$  方向向左，而位移也是向左  $d/2$ ，所以摩擦力對上方系統作  $W_{\text{fric}} = +fd/2$  的功，並且有著  $Q = -fd/2$  熱交互作用（能量流出上方系統）。對於上述幾種的  $y$  座標的熱力學第一定律有著如下形式：

$$fd/2 + W_{\text{fric}} + Q = \Delta E_{\text{upper system}}, \quad (7a)$$

$$y = +t/2 : fd/2 + (-fd/2) + (+fd/2) = fd/2, \quad (7b)$$

$$y = 0 : fd/2 + 0 + 0 = fd/2, \quad (7c)$$

$$y = -t/2 : fd/2 + (+fd/2) + (-fd/2) = fd/2. \quad (7d)$$

值得注意的是，對任何的系統邊界  $y$  而言，( $W_{\text{fric}} + Q$ ) 都是零。在這過程中，摩擦力對上方系統作的功，以及藉由熱交互作用傳至上方系統的熱能有著互保的作用。

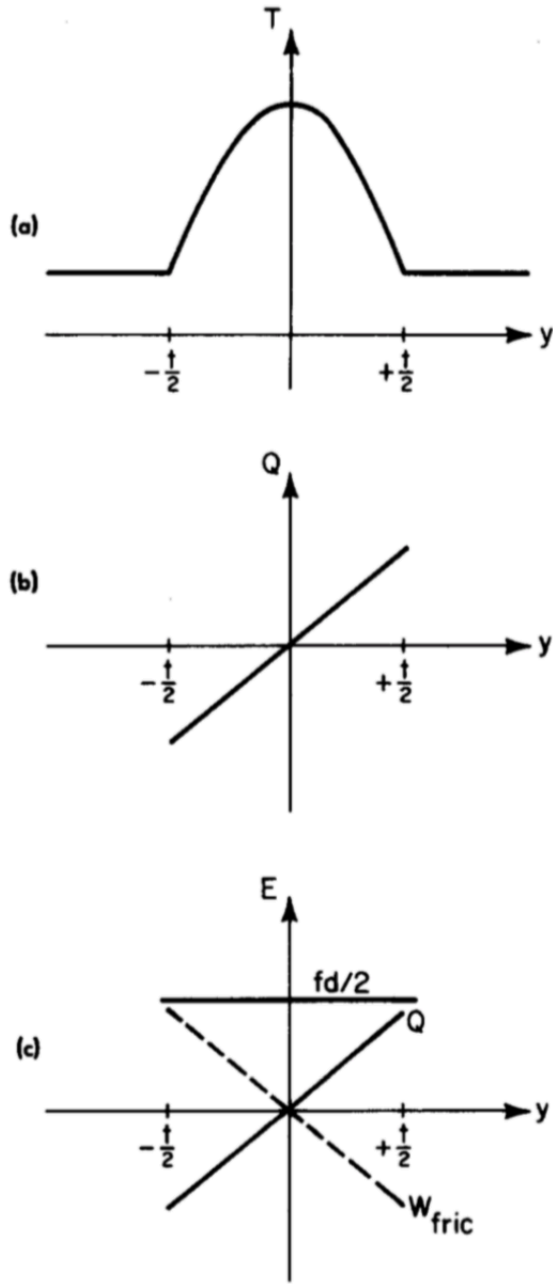


FIG. 6. (a)溫度、(b)流進上方系統的熱傳導以及(c)流進上方系統的所有能量與  $y$  座標的函數圖形。其中  $y$  座標是相對於潤滑油中介面（如圖五所示）之上的位置。值得注意的是，因為熱傳導  $Q$  正比於溫度梯度的負值，所以(b)圖僅僅是(a)圖的負導數函數。

另一方面，因為  $W_{\text{fric}}$  僅僅是  $f$  乘上系統下方邊界的位移，所以  $W_{\text{fric}}$  的曲線圖（也就是  $Q$  的圖形）與潤滑流體於該處的位移是一樣的（在現在這個例子中，就是一條斜直線）。

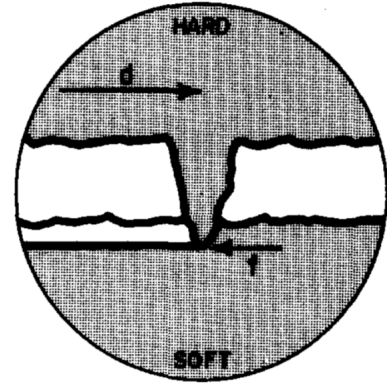


FIG. 7. 如果上方物體比下方物體還要硬非常多，那麼上方物體的突牙可能會沿著較軟的下方物體表面刮磨過去。此時，摩擦力作用點的位移是  $d$ ，並且下方物體對上方物體，藉由摩擦力，作用了  $-fd$  的功。

## VII. 異質摩擦分析

討論兩不同材質的物體於乾燥摩擦時所經歷的物理現象是非常有教育意義的。如果摩擦現象背後的機制涉及了產生或破壞金屬銲接，那麼，因為接觸點的運動取決於兩材質的相對硬度，所以摩擦力作用點的位移就會介於  $0$  與  $d$  之間（以下方物體作為參考系）。此外，因為這種情況不具有對稱性，所以這兩物體間可能會有不為零的熱傳導現象。

倘若上方物體比下方物體還要硬非常多（如圖七），那麼摩擦的主要運作機制就會是刮磨現象（plowing）[5]。此時，較堅硬的突牙會插入較軟物質中，並沿著表面刮磨過去。質地較軟物質所施予的摩擦力作用點，有著與上方物體相同的位移： $d_{\text{eff}} = d$ 。並且，下方物體對上方物體施予的摩擦力作功即為  $-fd$ 。因此，上方物體的热力學第一定律為  $fd - fd = \Delta E_{\text{upper}} = 0$ ，表示著上方物體並沒有獲得能量，也就不會變得越來越熱。

然而，如果下方較軟的物體變得比上方物體還要高溫，那麼就會在邊界上產生熱傳導作用  $Q$ ，並且，此能量是由下方物體流至上方物體。雖然作用於上方物體的功是  $fd - fd = 0$ ，但作用於下方物體的功卻是  $fd$ 。這使得兩者的熱力學第一定律變為：

$$Q = \Delta E_{\text{upper}} \quad (8a)$$

$$fd - Q = \Delta E_{\text{lower}} \quad (8b)$$

$$fd = \Delta E_{\text{upper} + \text{lower}} \quad (8c)$$

在這不具對稱性的例子中，通常是沒辦法單獨找出熱傳值  $Q$  的。在潤滑摩擦的例子中，我們那時能夠明確得出功與熱傳的互補結論，但對於乾燥摩擦來說，很難得出這樣單純的結論。不過，這困難並不會影響兩相同材質物體間的乾燥摩擦計算，因為，根據對稱性， $Q$  等於零。

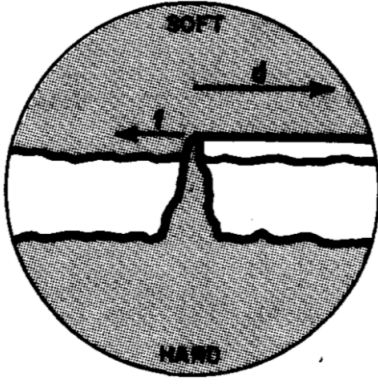


FIG. 8. 如果上方物體相對方物體還要軟許多，那麼較軟的上方物體會被靜立不動的突牙刮磨。此時，摩擦力作用點位移為零，因而並沒有對上方物體做功。

另一個極端情況是，如果是下方木塊比上方木塊還要堅硬許多，較軟的上方木塊藉會被靜止不動的堅硬突牙拖著走（如圖八）。在這情況下，接觸點並沒有位移，所以  $d_{\text{eff}} = 0$ 。因此，摩擦力並沒有對上方物體做功。對上方物體而言，熱力學第一定律即為  $(f)(d) - (f)(0) = fd = \Delta E_{\text{upper}}$ ，並且較軟的上方物體會越來越熱。再一次地，下方物體能藉由熱交互作用獲得來自上方物體的能量。

值得一提的是，Tabor 本人十分反對我們經常使用“粗糙”與“平滑”兩個詞彙去描述有摩擦，或者沒有摩擦的平面。他指出，當代對摩擦現象的理解顯示出表面的粗糙程度與摩擦現象並沒有什麼太大的關聯性。

### VIII. 參考書範例

參考書最喜歡的一個物理問題，就是物體在能夠產生摩擦力的斜面上下滑  $d$  距離的物體的能量轉移問題（圖九）。在這例子中，物體的高溫突牙持續撞擊、摩擦斜面上較低溫的區域，所以，物體很可能對斜面有個不為零的熱傳導作用  $|Q|$ ，並且是由物體傳至斜面（在先前兩物體互相摩擦的例子，這種接觸情況具有著對稱性）。將斜面上的物體作為系統，那麼其相關的方程式為：

$$CM: (mg \sin \theta - \mu N)d = \Delta \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) \quad (9a)$$

$$FLT: (mg \sin \theta)d - \mu N d_{\text{eff}} - |Q| = \Delta \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) + \Delta E_{\text{thermal of block}} \quad (9b)$$

雖然“摩擦力作多少功？”是個非常常見的問題，但因為這個物理量取決於未知的有效位移  $d_{\text{eff}}$ ，所以其實並沒有辦法計算摩擦力所作的功。因此，它真正在問的其實是  $-\mu Nd$  這一項，儘管摩擦力實際上所作的功僅僅是  $-\mu N d_{\text{eff}}$ 。

進一步而言，藉由上述的質心方程式與熱力學第一定

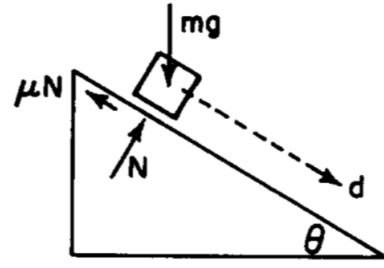


FIG. 9. 一個由具有摩擦力的斜面下滑的物體。斜面藉由摩擦力對此物體所作的功並不是  $-\mu Nd$ 。

律，我們得到

$$\mu N(d - d_{\text{eff}}) = \Delta E_{\text{thermal of the block}} + |Q|. \quad (10)$$

因為這條等式的右側是大於零的，所以有效位移  $d_{\text{eff}}$  必然小於物體實際位移  $d$ 。

如果我們將宇宙視為系統（包含物體、斜面與地球等），並寫出其熱力學第一定律：

$$0 = \Delta \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) - (mg \sin \theta)d + \Delta E_{\text{thermal of block}} + \Delta E_{\text{thermal of incline}}. \quad (11)$$

再將其與物體本身的熱力學第一定律比較，會得到

$$\Delta E_{\text{thermal of the block}} = \mu N(d - d_{\text{eff}}) - |Q| \quad (12a)$$

$$\Delta E_{\text{thermal of the incline}} = \mu N d_{\text{eff}} + |Q| \quad (12b)$$

$$\Delta E_{\text{thermal of the universe}} = \mu N d. \quad (12c)$$

### IX. 轉動摩擦

其實先前提到的質心方程式有一個轉動的版本。由質心的力矩方程式開始談起，

$$\sum_i \tau_{iCM} = I_{CM} \alpha, \quad (13)$$

接著，我們將其對一轉動位移  $\theta$  積分，會得到“轉動的質心方程式”，

$$\int \left( \sum_i \tau_{iCM} d\theta \right) = \int I_{CM} \frac{d\omega}{dt} d\theta = \Delta \left( \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \right). \quad (14)$$

值得注意的是，這並不是所謂的能量方程式，它並不包含熱能項。這裡，我們對所有力矩都使用了相同的角位移  $\theta$ ，然而外力力矩所作的功其實是

$$W = \sum_i \left( \int \tau_{iCM} d\theta_i \right), \quad (15)$$

而不同的力矩  $\tau_{iCM}$  可能有著不同的作用點角位移  $\theta_i$ 。



考慮一個，經由外部的馬達透過轉軸驅動，但轉軸仍受到外界之動摩擦作用的輪胎系統。如果  $\tau_m$  為馬達所施的力矩， $\tau_a$  為轉軸施予的摩擦力力矩，並且  $|Q|$  為由輪胎藉熱交互作用傳遞至外界（包括轉軸）的能量，那麼

$$CM : (\tau_m - \tau_a)\theta = \Delta \left( \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \right), \quad (16a)$$

$$FLT : \tau_m \theta - \tau_a \theta_{\text{eff}} - |Q| = \Delta \left( \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \right) + \Delta E_{\text{thermal of wheel}}. \quad (16b)$$

由於輪子與輪軸接觸點上的突牙形變，輪軸力矩的有效角位移  $\theta_{\text{eff}}$  必然比輪子的角位移  $\theta$  還要小。藉由比較轉動的質心方程式與熱力學第一定律，我們得到

$$\tau_a(\theta - \theta_{\text{eff}}) = \Delta E_{\text{thermal of wheel}} + |Q|. \quad (17)$$

值得注意的是，一個真正的剛體輪子（所有作用點的角位移  $\theta_i$  都相同）沒有辦法解釋所謂的摩擦現象；這兩者是不相容的。

## X. 熱力學第一定律的不變形式

雖然，在慣性座標系中，質心方程式都是對的，但因為質心位移與速度完全相對於參考系的選取，所以方程式中的數值隨著慣性參考系的不同而不同。這些變異項也出現在熱力學第一定律中。然而，將熱力學第一定律減去質心方程式後，我們得到了一個獨立於慣性參考系之選取的熱力學第一定律方程式不變形（Invariant First Law of Thermodynamics），底下簡寫為 IFLT。令第  $i$  個外力之作用點為  $\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{R}_i$ ，而  $\mathbf{R}_i$  為相對於質心的作用點位置。因此，

$$FLT : \sum_i \int \mathbf{F}_{i,\text{external}} \cdot (d\mathbf{r}_{CM} + d\mathbf{R}_i) + Q = \Delta \left( \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + \Delta E_{\text{internal}}, \quad (18)$$

$$CM : \sum_i \int \mathbf{F}_{i,\text{external}} \cdot d\mathbf{r}_{CM} = \Delta \left( \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right), \quad (19)$$

$$IFLT : \sum_i \int \mathbf{F}_{i,\text{external}} \cdot d\mathbf{R}_i + Q = \Delta E_{\text{internal}} \quad (20)$$

其中， $\Delta E_{\text{internal}}$  代表了在靜止參考系中，系統的巨觀與微觀的能量，並且可視為系統的靜止能量。在這篇論文中，當我們由熱力學第一定律扣除質心方程式，已得到較有趣的系統能量觀點時，其實我們都隱晦地使用了熱力學第一定律的不變形式。這使我們認為，IFLT 才是我們應該關注的點。

在 IFLT 中，力量對空間的積分只與相對於質心的位移有關係，所以此積分顯然獨立於我們座標系的選擇。此外，因為內能的變化量（或者說，靜止能量的變化

量）也是獨立於座標系的物理量，所以 IFLT 證明了熱傳導  $Q$  是獨立於參考系的物理量（ $Q$  也許可視為熱傳導與其他非作功形式的，透過系統邊界的能量傳遞現象的總和，像是輻射與質量傳遞）。IFLT 的形式使我們更清楚地看見，只有在系統是可形變的、轉動的，或者說，內能可能變化時（也就是說具有內在結構），熱力學第一定律才會不同於質心方程式。也許我們也能將 IFLT 視為質心座標系中的能量方程式，即便質心具有加速度，這也是成立的。

值得注意的是，IFLT 將那些越過系統邊界的能量傳遞現象與系統重要的內能變化連結在一起。相較之下，質心方程式可說僅僅是質心的運動學方程式，完全沒有任何系統內部的能量變化資訊。另外，我們也能注意到，如果  $v_{CM,i}$  與  $v_{CM,f}$  是質心相對於某慣性座標系的初速與末速，那麼，對於另一個以  $(v_{CM,i} + v_{CM,f})/2$  速度運動的慣性系而言，質心方程式就會還原成  $0 = 0$  的形式。在這種特殊的慣性系中，質心初始速率與末速率是相同的，僅管運動方向可能有所不同。

在熱力學第一定律中的力積分當然就是所謂的作功。事實上，已有人提出，應該可將質心方程式中的力積分稱為“假功”（pseudowork）。或許，我們應該將 IFLT 中的力積分稱為“不變功”（invariant work）。上述這些物理量的關係就是，真正的功等於假功與不變功的總和。

IFLT 為能量傳遞提供了一個滿有用的觀點。例如，因為對於質心參考系而言，摩擦力的方向與突牙的運動（彎曲）方向是相同的，所以作用於一個物體上的摩擦力不變功（invariant work）是大於零的值。這個大於零的不變功與上升的物體的內能有關係。在熱力學第一定律中，作用於物體上的摩擦力作功會因參考系的不同而有正值或負值，但相對應的不變功卻總是大於零的正值，這是獨立於參考系的物理量。IFLT 以及摩擦力的作用點幾何關係，能夠被用來進一步推演方程式(8c)與(12c)，以證明在兩互相滑行的物體中的內能增加量，等同於，摩擦力與相對於兩物體質心的位移的位移乘積之絕對值。

另一個例子是，考慮一個溜滑板的人向牆壁推過去。因為牆壁對人的推力之作用點沒有任何的位移，所以牆壁作用於此人的力量並沒有對此人作功。在熱力學第一定律中，這個人增加的動能則完全來自他自身的內能。因為溜滑板的人的質心確實有位移，所以牆壁施予的力確實作了正的假功（pseudowork），並且，在質心方程式中，這個大於零的假功確實等同於動能的增加量。另一方面，因為牆壁推力之作用點遠離了人的質心，所以牆壁推力施予了負的、小於零的不變功（invariant work）。在 IFLT 中，這個負的不變功等於此人內能減少的量（倘若再將此加上負號，那我們可以說，溜滑板的人對外界作了大於零的不變功）。對同一過程而言，其實有著非常多種不同的能量觀點。將 IFLT 應用在第三份參考文獻中的各種問題會是個還滿不錯的嘗試。

## XI. 致謝

最初，是由 James H. Smith 首先向我們之中的一人解釋摩擦力所作的功背後的諸多意義。這篇文章可說是將他的想法做進一步延伸推廣的嘗試。我們非常感謝許多物理學家提供的建議與討論，尤其是 James H. Smith, Anthony J. Galli, Lynell Cannell, Dennis Kane, Kames Wolfe, Donal Shirer, 以及 Howard McAllister。我們也非常感謝工程學界的同事，Cristino Cusano 與 Daniel Drucker。

對那些可能已經看過由 Sherwood 一人早期寫的，這篇文章的早期版本的讀者，我們 (American Journal of Physics) 希望能夠說明清楚，在遞出這份論文後，我們才發現到兩位作者都獨自地得到了相同的結論，並發表過非常有關聯性的幾篇文章。因此，我們決定以共同作者的方式發表這篇論文。

## XII. 後記

在 Bruce Sherwood 教授的網誌中 ([brucsherwood.net/?p=134](http://brucsherwood.net/?p=134))，有提到當時發表這篇論文的一些歷史。其實，在 1984 年發表的〈動摩擦力的作功與熱傳分析〉之前，已經發表了更基礎的〈假功與真功〉論文，但因為教授的想法相當於否定了主流的解題方法，所以最初是被美國物理期刊退件的。不

過，最後 AJP 當然還是勉強接受並發表了教授這兩篇文章。值得一提的是，在發表〈動摩擦力的作功與熱傳分析〉之前，Bruce Sherwood 教授也有將他對摩擦力作功的常見教法的觀點，與相當著名的普通物理學參考書作者 Halliday 與 Resnick 分享。後來，Halliday 回信說：

Let me say at once that we are well aware of its serious flaws, along precisely the lines that you describe. We have tried several times to patch things up in successive printings but the matter runs too deep for anything but a total rewrite. We have, in fact, such a rewrite at hand, awaiting a possible next edition.

我們非常清楚你所描述的這些錯誤。我們嘗試過許多方法，試著在接下來的版本中修正這些錯誤。但這實在太過繁雜，以至於幾乎要完全重寫（功與能量的部分）。事實上，我們手邊已有些修訂後的草稿，或許會於下個版本修正好這一切。

有點遺憾的是，Bruce Sherwood 教授也提到，到目前 (June 24, 2017) 為止，他還沒看到 Halliday 於其新版著作中的任何修改。在 [matterandinteractions.org](http://matterandinteractions.org)，Bruce Sherwood 教授於 Articles & Talks 頁面的“Bringing atoms into first-year physics”文章中，針對可形變系統的教學方法提出非常重要的修改與調整建議。有興趣的讀者可前往瀏覽。

- 
- [1] H. Erlichson, Am. J. Phys. **45**, 769 (1977).  
 [2] C. Penchina, Am. J. Phys. **46**, 295 (1978).  
 [3] B. A. Sherwood, Am. J. Phys. **51**, 597 (1983).  
 [4] F. P. Bowden and D. Tabor, The Friction and Lubrica-

- tion of Solids (Oxford University, London, 1950 and 1964), **Part I** and Part II.  
 [5] D. Tabor, J. Lubr. Technol. **103**, 169 (1981)