

# 假功與真功

Bruce Arne Sherwood\* and 高英倫 (翻譯者) †

(Dated: Received 7 January 1982; accepted for publication 28 July 1982)

本篇文章是在獲得美國物理期刊 (American Journal of Physics) 與 Bruce Sherwood 教授的授權之下，進行翻譯並公開發佈。正文開始：教力學時，我們應該釐清牛頓第二定律的積分公式與能量方程式，因為這能幫助我們更加掌握系統、功與能量的抽象概念。本文所提出的，關於重新處理功與能量的方法，不僅能提升力學課程的一致性，也為力學與熱力學提供更直觀、具體的理論橋樑。(本文刊登於美國物理學刊 American Journal of Physics 的原始連結：<http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.13173>)。

## I. 常見迷思

當車子逐漸起步加速時，車子好像是因摩擦力作正功的關係，而獲得越來越多的能量——並以動能的形式表現出來。不過，其實地面並沒有藉摩擦力作功以將能量傳遞給車子。事實上，車子動能是源自汽油的燃燒，而不會是源自地面。

對於從粗糙斜面下滑的物體，我們常說物體獲得的動能等同於「重力所作的功再扣掉摩擦力所作的功」。但其實我們也很清楚所謂的「摩擦生熱」現象，而在所謂的功能定理方程式中，卻始終見不著——對「摩擦生熱」現象而言——極為重要的熱能或內能的蹤影。

由此可見，我們往往無法將諸多現象中涉及的對象簡化為單質點系統並加以解釋之。不過，因為傳統的作法給了我們看起來還滿正確的答案，所以我們難免會對上述問題視而不見。這篇文章的目標，就是去梳理、釐清諸多模稜兩可之處，進而使我們了解箇中緣由，得到更周全的物理解釋。接下來提出的方法，不僅能釐清上述情況，更能夠強化力學、熱力學之間的理論連結。

## II. 假功——PSEUDOWORK

Erlichson 與 Penchina 早已指出，我們往往都不清楚牛頓第二定律的路徑積分以及——力學中的——功與能量方程式的異同之處[1][2]。以多質點系統的牛頓第二定律為例，

$$\sum_i F_{i,\text{external}} = Ma_{\text{CM}}, \quad (1)$$

並將之對質心位移積分：

$$\int \left( \sum_i F_{i,\text{external}} \right) \cdot dr_{\text{CM}} = \int M \frac{dv_{\text{CM}}}{dt} \cdot dr_{\text{CM}}; \quad (2)$$

$$\sum_i \left( \int F_{i,\text{external}} \cdot dr_{\text{CM}} \right) = \Delta \left( \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 \right). \quad (3)$$

Penchina 將左式稱為「假功」(pseudowork)。因為它是力量對質心位移的累積量，而不是力量對其作用點位移的累積量，所以這並不同於作用於系統上的真功 (real work)。另一方面，因為右式只涉及質心速度，所以它並非系統的動能變化量——我們往往將  $\frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$  稱為質心動能。此外，雖然「假功能方程式」是個滿適合用來表達其數學關係的名稱，不過，基於教學上的理由，我們認為「質心方程式」(CM equation) 的名稱更能釐清此式與功、能量的關係：其實，此方程式與能量並無任何關係，而僅與質心的物理量有關係。

此外，因為第  $i$  個力量的作用點位移  $dr_i$  並不必然等同於質心位移  $dr_{\text{CM}}$ ，所以對第  $i$  個力量而言，

$$\int F_{i,\text{external}} \cdot dr_{\text{CM}} \neq \int F_{i,\text{external}} \cdot dr_i; \quad (4)$$

假功即不同於真功。

不過，對於位移恰好等同於質心位移的作用點  $dr_i = dr_{\text{CM}}$  而言，假功恰好等同於真功。此外，因為單質點系統之能量僅僅是動能，所以質心方程式此時即為功與能量的方程式。

若由運動方程式之  $x$  分量開始推導，可得到

$$\sum \left( \int F_{x,i,\text{external}} dx_{\text{CM}} \right) = \Delta \left( \frac{1}{2} M v_{x,\text{CM}}^2 \right) \quad (5)$$

而  $y, z$  分量也可得相同的方程式，上述三條方程式之代數和就能得到完整的質心方程式——即俗稱的功能定理。

## III. 示例說明

我們可藉由各種情況下的質心方程式 (CM equation) 與功能方程式 (Work-Energy equation)，看出它們的異同。首先，考慮一個在斜面向下做純滾動的圓

\* Computer-based Education Research Laboratory, Departments of Physics and Linguistics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois 61801

† 並非作者，只是獲得 Sherwood 教授與 AJP 的翻譯授權。畢業於台灣大學物理學系與化學工程學系，即將就讀台灣大學電子工程學研究所，現為全職物理家教。個人網站：[www.ethanideas.url.tw](http://www.ethanideas.url.tw) 電子信箱：k0185123@hotmail.com

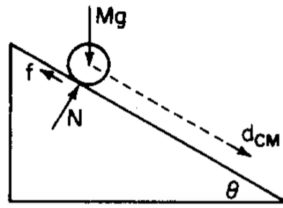


FIG. 1. 由斜面上方向下做純滾動的圓柱體

柱體，其質心位移為  $d_{CM}$ （如圖一）。將該圓柱體作為系統， $Mg$  即為受地球作用於圓柱體上的外力：

$$\text{CM, cylinder:} \\ (Mg \sin \theta - f)d_{CM} = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \right), \quad (6a)$$

$$\text{WE, cylinder:} \\ (Mg \sin \theta)d_{CM} = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \right) + \Delta \left( \frac{1}{2} I\omega^2 \right) \quad (6b)$$

上述兩式都是對的，它們各自給予不同的資訊，各有各的優點。值得注意的是，雖然因為摩擦力是合力的一部份，所以質心方程式有摩擦力  $f$  這一項，但是它並沒有出現在功能方程式（WE equation）中——因為摩擦力之作用點是始終維持瞬時靜止的滾動接觸點。因此，摩擦力作用點位移為零，並且不作（真）功，即便我們可能會說它作了  $-fd_{CM}$  的假功。

另外，儘管質心方程式看起來非常像是能量方程式，但它其實跟能量無關，而這也是為什麼質心方程式並沒有包含轉動動能項的原因。質心方程式僅僅是下式的空間積分：

$$\sum F_{i\text{external}} = Ma_{CM} \quad (7)$$

它顯然與能量無關，而僅僅與（數學上的）質心運動有關係。不過呢，如果每個力量之作用點都恰好經歷與質心相同的位移，那麼質心方程式確實會與功能方程式（WE equation）相同。其中一個例子就是單質點系統。至於滾動中的圓柱體，因為作用於其上的摩擦力與重力經歷不同的位移，所以它的質心方程式（CM equation）就不同於功能方程式（WE equation）了。除此之外，對於可形變系統與旋轉之剛體系統而言，質心方程式也是不同於功能方程式的。

倘若我們將地球納入系統之中，那麼重力  $Mg$  就不再是外力，並且，功能方程式就變為：

$$\text{WE, universe: } 0 = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \right) \\ + \Delta \left( \frac{1}{2} I\omega^2 \right) - (Mg \sin \theta) d_{CM}. \quad (8)$$

當我們將宇宙視為系統時， $Mgh$  這一項就以重力位能變化量之角色出現在右式中，而當我們僅以圓柱體為系統時，它就以外力作功的角色於左式出現。因為功能方程式的左式必須是外力所作的功，所以我們很快就能發現

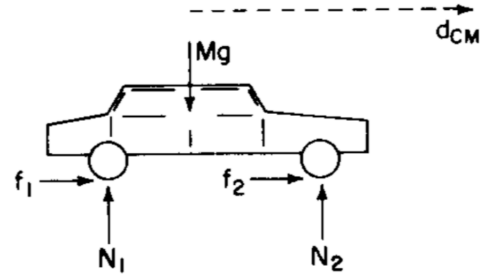


FIG. 2. 以不打滑之輪胎加速的汽車，並忽略空氣阻力。

「系統概念」是非常重要的。如 Penchina 所言，質心與功能方程式有助於同學理解功與能量。同樣地，於一特定過程中，以不同的系統分析功能方程式，也有助於理解——作為「過程量」的——功的意義，以及——作為「狀態變化」的——能量變化意義。

#### IV. 能量方程式

接著我們考慮一台正在加速中的汽車。為了不去考慮排放廢氣的能源問題，我們假設它是一台電動車，並以這台車作為接下來分析的系統（如圖二），並且我們也忽略空氣阻力的影響。圖中的力量  $f_1$  與  $f_2$  表示各自作用於前輪與後輪的合力。因為這台車並沒有打滑，所以這些力量的作用點並沒有位移，所以它們也就都沒有作功。不過，質心方程式確實能說明這些力量究竟是如何改變質心速度的：

$$\text{CM: } (f_1 + f_2) d_{CM} = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \right). \quad (9)$$

這條質心方程式跟它的推導依據——牛頓第二定律——完全相同： $f_1 + f_2 = Ma_{CM}$ 。雖然摩擦力讓質心能夠進行加速運動，但因為它們確實不作功，所以質心方程式的左式並不是作用於車上的功。同樣地，質心方程式的右式同樣也沒有考慮到汽車所有的能量變化，而只提到汽車的質心動能變化而已。事實上，汽車的能量有非常多項，底下是這台車的能量方程式（忽略空氣阻力）：

$$Q_{\text{net}} = \Delta \left( \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \right) + \Delta KE_{\text{internal}} \\ + \Delta E_{\text{thermal}} + \Delta E_{\text{battery}}. \quad (10)$$

$Q_{\text{net}}$  指的是外界經由熱交互作用傳遞給汽車的能量，主要是由較高溫的引擎傳遞至空氣的能量（ $Q_{\text{engine}} < 0$ ）與由輪胎傳遞至較低溫的地面的能量（ $Q_{\text{tire}} < 0$ ）。 $\Delta KE_{\text{internal}}$  是指汽車內部所增加的能量，包括輪胎與引擎。 $\Delta E_{\text{thermal}}$  則與引擎、電池的溫度上升有關（摩擦、歐姆加熱以及電池放電的不可逆過程）。至於  $\Delta E_{\text{battery}}$ ，是指用以產生上述能量變化的化學能變化。上述的能量方程式來自於廣義的能量守恒定律：

外界輸入系統的總能量（力學功、熱傳、質傳等）等同於系統能量變化（動能、重力位能、化學能等）

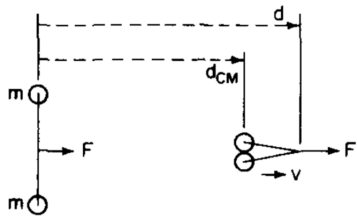


FIG. 3. 在光滑桌面上，有著兩個繫在一起的圓盤，它們由靜止開始向右加速。外力的作用點比系統質心移動得還要遠。

雖然我們總是將能量守恆定律廣泛地應用在各個科學領域中，但由於歷史的緣故，即便它並不必然跟熱力學有關，但我們仍將其稱為熱力學第一定律。進一步而言，雖然「純粹力學的」功能方程式（WE equation）是其中一種傳遞能量的形式，也就是能量守恆定律的一個特例，但它仍然不能由牛頓定律所推導出來。因此，我們應該只稱它為「能量方程式」。此外，因為我們經常將「功能方程式」一詞誤用在質心方程式上[3]，所以如果我們拋棄「功能方程式」一詞，並在力學課程中，使用「質心方程式」與「熱力學第一定律」，那麼這似乎會是個滿明智的選擇。另一方面，因為所謂的能量守恆定律，其實是熱力學課程中的第一定律，所以如此這般的術語調整有著接續力學課程概念的額外優點。將來，如果我們終於不再使用「功能定理」一詞，那麼可再把它作為過渡用語的「熱力學第一定律」正名為「能量守恆定律」。之所以不該將「能量守恆定律」稱作「功能定理」，是因為「功」只不過是其中一個跨過系統邊界以傳遞能量的管道。（另外，在從力學過渡到熱力學的過程中，有個用法上的疑慮。在力學課中，我們通常將作用於系統上的功定為正值，並寫下  $W = \Delta E$ 。然而，在熱力學課程中，由於我們通常想強調系統能夠因輸入的熱，對外界付出多少的能量，所以通常將由系統對外界作的功定義為正值，因而寫下  $Q = \Delta U + W$ 。有鑑於此，我們應該在熱力學課程中，向學生說明這細微的記號差異。）

## V. 助於釐清能量守恆定律的範例

因為絕大多數教科書並沒有刻畫清楚質心方程式與熱力學第一定律的異同之處，所以很難看到相關的作業與練習題。不過，針對那些使用電腦軟體教力學的課程，目前已經有合適的習題，可讓學生全盤掌握能量的概念[4][5][6][7]。我將在這節細談一些經典的問題，試著勾勒這些抽象的物理定律，並供讀者參考以設計更加有助於教學的習題。

這些習題的特色就在於，我們選定的——往往由許多物體組成的——系統形狀是能夠改變的，像是鬆開的鐵鍊或正在攀岩的人（以人與地球為系統而言，人與地球的距離越來越遠）。不過，讓我們先以不涉及——因形變而產生的——組態能量（configurational energy）習題來舉例說明。

第一題是由 Michael Wiessman 設計的習題。兩個由輕繩繫在一起的圓盤，放置在光滑桌面上。細繩中點被

一定力向右拉扯，如圖三所示。沒多久後，兩圓盤產生非彈性碰撞。當靠在一起的兩圓盤加速至速率  $v$  時，我們為此過程寫出如下方程式（FLT 表示熱力學第一定律——“the First Law of Thermodynamics”——的簡寫）：

$$\text{CM: } Fd_{\text{CM}} = \frac{1}{2}(2m)v^2, \quad (11a)$$

$$\text{FLT: } Fd = \frac{1}{2}(2m)v^2 + \Delta E. \quad (11b)$$

外界施予的定力作用點位移  $d$  比質心位移  $d_{\text{CM}}$  還要長。 $\Delta E$  這一項是兩圓盤經歷非彈性碰撞時，由力學能轉變而來的其他形式的能量（倘若在此過程中，有產生不可忽視的聲波、熱輻射或藉熱交互作用傳至桌面的能量，那麼這些能量傳遞量應以負數的形式出現於熱力學第一定律中，雖然在這裡它們都被歸類在  $\Delta E$  這一項中）。這類問題通常是在給定外力  $F$  與施拉距離  $d$ 、繩長的情況下，請學生找出末速  $v$  與非彈性碰撞所產生的能量  $\Delta E$ 。

第二個問題是關於在一光滑平面上，拉開一條捲曲在一團的金屬鍊的問題。我們經由一定力，將最初捲曲在一起、長度為  $L$  的金屬鍊向右拉扯（如圖四）。在金屬鍊完全被拉直時，金屬鍊之瞬時速率為  $v$ ：

$$\text{CM: } F(d - L/2) = \frac{1}{2}mv^2, \quad (12a)$$

$$\text{FLT: } Fd = \frac{1}{2}mv^2 + \Delta E. \quad (12b)$$

當金屬扣環間的非彈性碰撞現象漸漸緩和下來後，其溫度應會略為增加。倘若能夠忽略系統在這碰撞過程中與外界的能量傳遞現象，那麼此處的  $\Delta E$  即為與金屬鍊之升溫現象有密切關係的內能變化量。藉由質心方程式與熱力學第一定律，同學們得以解出末速率  $v$  以及內能變化量  $\Delta E$ 。

接下來是第三個習題。考慮兩個最初靜置於光滑桌面上物體。它們後來各自受到一個等大反向的力量，將它們拉離彼此，如圖五所示。以這兩物體為系統，我們可寫出如下方程式：

$$\text{CM: } (f - f)\Delta x_{\text{CM}} = \frac{1}{2}(2m)v_{\text{CM}}^2 = 0, \quad (13a)$$

$$\text{FLT: } 2fd = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right); \quad (13b)$$

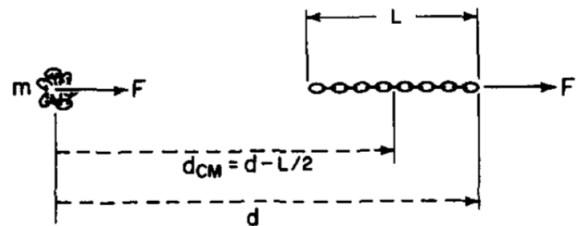


FIG. 4. 有條捲曲在一團、靜置於光滑桌上的金屬鍊，被一定力向右拉扯。此外力的作用點移動得比金屬鍊質心還要遠。

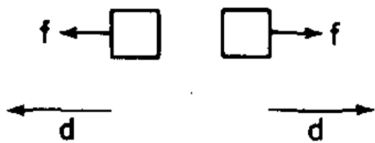


FIG. 5. 這是由兩物體構成的系統。兩個最初靜置於光滑桌上的物體，被兩個等大反向的力量拉離彼此。值得一提的是，在這過程中，它們的質心始終維持靜止。

系統的質心速度始終是零，質心也就一直靜止下去。不過，這兩個物體確實都獲得了  $v$  的速率。此時，對於外力作功於系統上的事實，我們可說是看得清清楚楚、明明白白了。我們可用這十分單純的題目來向同學說明質心方程式與熱力學第一定律間的差異。類似的習題還有彈簧伸縮現象、慢慢舉起槓鈴的選手（將地球與槓鈴視為系統）等。在上述例子中，系統合力都是零，也就是說，系統質心並沒有加速，但各外力確實對系統作了功。對這些情境不斷的反思，必能使同學們推敲出所謂的位能（"potential" energy）概念。

在考慮完不涉及組態能量概念的題目後，我們接著來看看關於組態能量的範例。這類型的範例滿多是關於人們跳躍或攀爬的情境。而如果我們的四肢完全沒有打滑，那麼不論那些接觸面（地面、牆面等）施予的力量有多麼的大，這些外力始終不會對我們作功。接著，考慮一個人由蹲姿向上跳躍的過程。他的質心最終上升了  $d_{CM}$ （如圖六）。我們用  $\bar{N}$  標記在人與地面仍保持接觸時，地面施加此人腳上的時間平均正向力。而在忽略與空氣熱交互作用的前提下，我們能寫下：

$$CM: (\bar{N} - Mg)\Delta d_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2, \quad (14a)$$

$$FLT: -Mgd_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \Delta KE_{internal} + \Delta E_{thermal} + \Delta E_{chemical}. \quad (14b)$$

因為質心方程式與平均正向力  $\bar{N}$  有關，所以這能用來估計所需的地板硬度。對此，熱力學第一定律沒辦法給予什麼資訊。另一方面， $\Delta KE_{internal}$  包括了手腳擺動的動能。 $\Delta E_{thermal}$  彰顯了人體在與空氣進行熱傳導之前的升溫現象。最後，必為負值的  $\Delta E_{chemical}$  則是用以轉換給其他形式能量的化學能變化。倘若我們將宇宙視為系統，那麼  $Mgd_{CM}$  這一項將以重力位能變化量的形式出現在熱力學第一定律的右側。在這樣的系統選擇下，系

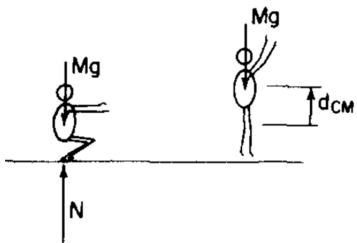


FIG. 6. 一個由半蹲姿勢向上跳躍的人。因為地面施予的正向力作用點位移為零，所以正向力並不作功。

統沒受到任何的外力作功。只要給定這個人的最大跳躍高度  $d_{CM}$ ，同學們就能由此計算出地面施予人的平均正向力為何。至於熱力學第一定律，則可以用來計算此人的內能變化，這可用以估計完成此跳躍所需的最小化學能量值。

接著是關於一位攀岩者的例題。這峭壁對人施予向上的力量，同時也施加力偶於此人身上（如圖七）。若以攀岩者為系統，我們即可寫下：

$$CM: (f_1 + f_2 - Mg)d_{CM} = 0, \quad (15a)$$

$$FLT: -Mgd_{CM} - Q_{loss} = \Delta E_{chemical}. \quad (15b)$$

因為在沒有打滑的前提下，峭壁與人的接觸點並沒有移動，所以峭壁所施予的力量並不對攀岩者作功。因此，攀岩者藉由轉換體內的化學能以彌補來自外界的重力  $Mg$  所作的負功，以及彌補——以熱交互作用形式——傳遞至空氣的  $Q_{loss}$  能量。同樣地，如果我們將宇宙視為系統，那麼  $Mgd_{CM}$  會以重力位能變化量的形式出現在熱力學第一定律的右側，並且，此時  $Q_{loss}$  也會以大氣內能變化量的形式出現在熱力學第一定律的右側。關於這例題，我們能夠問同學的是，人體釋放出來的化學能以及傳遞至空氣的熱量總和為多少？

關於攀岩問題，有個常見的說法是「攀岩者作功以增加他的重力位能」，不過，因為地球與峭壁都沒有移動，所以攀岩者實際上並沒有對任何的系統作功。此外，我們只能在包含地球與攀岩者的系統中提及重力位能，而不能夠說那是「攀岩者的」重力位能。很遺憾地，「石頭的重力位能」、「人的重力位能」等諸如此類的說法實在過於常見，但因為只有當系統同時包含物體與地球時，重力位能才有意義，所以我們真的應該要竭力避免這種說法。這個迷思經常使同學在分析自由落下的石頭能量問題時，重複計算到  $mgh$  這一項，並且算了兩次： $mgh = \Delta KE - mgh$ 。在這種情況下，同學們混淆了兩種不同的系統：石頭本身（地球對此石頭作了  $mgh$  的功）以及宇宙本身（在此系統下，重力位能的變化為  $-mgh$ ）。只要能避免這種重複計算的錯誤，那麼同學就能進一步掌握兩個或多個系統的能量轉移問題。力學中的系統概念有多重要，處理功能問題時的系統概念就有多重要。重視系統的選擇，並且在處理功能問題時繪製相關的力圖，都能讓學生有更多的機會去捕捉並掌握這些概念。

同樣的想法也能應用在推導「位能 =  $mgh$ 」的方法

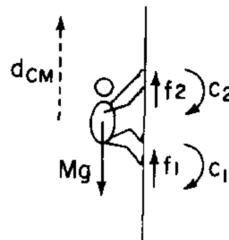


FIG. 7. 攀岩者緩慢地爬上鉛直的峭壁。雖然峭壁有對人施予外力與力偶，但因為接觸點沒有位移，所以峭壁對人並不作功。另外，在攀爬過程中，地球對攀岩者作負功。

上：我們必須非常清楚「石頭本身」以及「石頭與地球」這兩個系統的不同。而我們的確就是藉由比較這兩個系統的能量關係以得知位能究竟變化了多少。

一個向前加速的跑者，或者是一位向上爬樓梯的女人，作用於他們腳上的正向力事實上都是不作功的。也就因為比起了解其實純滾動的輪胎與地面的接觸點並沒有位移，人在走路時，腳與地面的接觸點沒有位移還比較好理解，所以跑者的例子比加速的汽車例子還要好讓同學意識到，那些能夠讓物體加速但卻同時不作功的力量的存在。

近年來，有些教科書有稍微提到所謂的質心方程式，像是 Halliday 與 Resnick 於 1981 年的教科書修訂版就於 137-140 頁提到質心方程式。「向上跳躍的人」、「正在減速且沒有打滑的汽車」、「一位被推離太空船的太空人」、「用手推牆以停下來溜冰者」都有在此書例題中出現。這些都是作用點位移為零的範例。

或許有人會認為上述這種區分太過於「刻意」，甚至有點讓人感到我只是在「賣弄學問」，但這其實還滿見仁見智的。畢竟，在過去數十年來，物理老師們一直都很有耐心地解釋「功」的物理內涵，並一直強調著「即便一直拿著書會讓手感到疲累，但我們仍沒有對書本作功」。而倘若我們連這種如此瑣碎的現象都願意刻意花心力去強調它、重視它，那麼我們也就更應該有充足的耐心，去討論與重視雖然較複雜，但卻更為重要的行車與攀岩者等問題。

除此之外，如果我們沒辦法釐清這些概念，那麼當我們處理摩擦力的作功問題時，勢必會得到不正確的結果。如我接下來即將發表的文章[9]，動摩擦力作用點的位移，基本上比物體的質心位移還要來得小。而當物體作純滾動運動時，摩擦力作用點位移必然是零，也就因此不作任何的功。一個在桌上滑行的物體，桌面的細微形變將使得動摩擦力的有效位移  $d_{\text{eff}}$  比質心位移  $d_{\text{CM}}$  還要小。事實上，就是假功  $-\mu N d_{\text{CM}}$  與真功  $-\mu N d_{\text{eff}}$  的差異，提升了物體熱能。

## VI. 談談關於教學方法的常見爭議

基本上，我們已約定俗成地不在力學課中提及熱力學第一定律，取而代之的是僅能處理純力學範疇下的功能方程式，並為此努力闡明外力、內力、非保守力、力學能等相關概念。然而，這樣的教學方法有著一個很嚴重的缺點：它使得力學導論課過於制式化。如此這般的制式教學，使得我們沒辦法將能量關係應用在許多相當常見的力學問題，並由此產生了許多人為的、不必要的力學與熱力學之間的界線區分。對此常見辯護是，這樣的教法能夠讓力學與熱力學成為一門完備自足的（self-contained）的公理化系統，如此一來，在它們各自的形式框架下，我們能夠更熟悉這些物理原則的運算操作並呈現出這兩個主題的發展史。然而，我們都知道牛頓力學並不足以處理諸多力學問題中的能量面向。

的確，將力學課程僅限縮在牛頓力學中是可能的。但若真想這麼做，那仍須作出兩項重要的改變。第一，我

們必須釐清質心方程式與功能方程式，否則，我們就不得不對功與能量的定義做出些不必要的「妥協」與「折衷」。第二，我們應將那些涉及力學以外之能量關係的物理情境，從力學課程中刪除：加速的汽車、非彈性碰撞、攀岩者或跳躍中的人等等的。由此可見，這的確需要付出相當大的代價，但如果我們在力學課程中，真的只想使用牛頓力學，那麼這是唯一的、使這樣的公理化教學系統自洽一致的（consistent）方法。

如此嚴苛且純粹的牛頓力學課程，使人不免懷疑，我們想教的究竟是合理一致的力學，還是物理本身呢？儘管愛因斯坦在遠比牛頓還要晚的年代中出現，我們還是會在力學課中提及狹義相對論。因此，即便直到十九世紀才出現能量守恆定律（或說熱力學第一定律），並且沒辦法由牛頓力學中推導出它，但只要我們需要使用這條能量守恆定律，我們就不應猶豫，而應立即地介紹、教學並使用它。事實上，因為熱力學第一定律很容易從生活經驗中推敲出來，像是常見的關於能量得失現象等，所以其實學生們並不難接受熱力學第一定律。

在力學課程中，以「熱力學第一定律」之名介紹與教授能量相關的概念，能夠為日後熱力學課程奠定良好穩固的基礎。這將使得熱力學第一定律以某個滿熟悉的角色出現在熱力學課程中，而不是對不完備的力學功能方程式的修正，或甚至是將熱力學第一定律視為一個全新的概念，而渾然不覺其實我們已使用它非常多次。

雖然改變功與能量主題的教學方法是一件非常難的事，但因為這能去除力學與熱力學間不必要的斷裂，所以我想這仍是值得的。此外，如果能在力學課中，學習處理更多關於能量的普遍問題，那麼其實這還有其他好處。在力學課的能量章節，可以討論關於轉動物體的熱力學第一定律，並且可以僅僅提及轉動動能為  $KE_{\text{rot}}$  而先不去準確地計算它，像是，我們可在比現今的教法還要早一點的階段，去討論由斜面向下滾動圓柱的質心方程式與熱力學第一定律。如此一來，在未來的學習階段，當老師開始提及與計算轉動物體的動能以及轉動慣量時，就能從此汲取相關的學習經驗。一旦學生學會使用與區分質心方程式及熱力學第一定律，那麼只需略微提及  $\frac{1}{2}I\omega^2$  與轉動運動學（而力矩與角動量則留到未來再談），我們就能處理更多更廣泛的、涉及轉動的物理問題。如此這般的教法，能夠使我們克服以往在教轉動動力學時所需跨過的諸多門檻——從頭開始一次引入許多全新的概念，就只是為了討論一些較新奇的事物。在此，我得向 James H. Smith 獻上我最誠摯的謝意。感謝他幫我指出在教轉動力學時，引入能量概念的諸多優點。

## VII. 結語

我是在 1971 年開始關注這些議題的。那年，Lynell Cannel 跟我漸漸懷疑，為什麼（我們現在所說的）質心方程式中沒有應該要有的熱能項呢？當時她正準備要設計一套功與能量主題的多媒體電腦教案，為了讓這教學內容清楚地勾勒出許多概念，我們開始試著把許多概念、理論想得更加清楚。我們的同事，James Smith，為此提供了——那些已在這篇文章中呈現的——相當完

整細緻的說明。之後幾年，我們重新設計了功與能量主題的教學方法，並從中獲得非常多寶貴的經驗。其中，有部分收穫已呈現在關於功、能量、質心方程式與相關練習題的多媒體教案中。上述一切及其相關的考量，也促使我們的多媒體教案，越來越重視力圖的概念與繪製[10]。

我得承認，對於想讓同學通盤掌握功與能量概念的企圖，我們並沒有完全成功。學生們確實覺得這主題很困難。另外，雖然熱力學第一定律帶給我們一些其他的概念問題，但同學們確實漸漸覺得質心方程式是一個滿詭異的方程式。也許這只不過是多質點系統的牛頓第二定律——質心方程式的基礎——的詭異所造成的效果。畢竟，多質點系統的牛頓第二定律談論的是質心，以及那些作用在——可能離質心非常遠的作用點——的力量，之間的關係。

或許是因為這樣的教法跟轉動、角動量等章節一樣困難，或是因為這方式本身過於新穎，所以才讓學生感到困難。另一方面，主流的標準教科書也尚未用這方式處理能量單元。此外，如先前所提到的，那些能幫助我們刻畫相關概念與議題的範例、練習題，都還沒有被整理到教科書中，也不是每位物理老師都會這麼教能量。而中學教職員以及研究所的教學助理，當他們仍是大學生時，都是以截然不同的方式去學這些概念，所以即便他們想這麼教，也會需要給予他們額外的協助。總之，我們尚未具備足夠的教育資源、條件以改變功與能量的教學方式。為了補齊所需要的資源，我們不僅開始設計多媒體教案、寫了本新的教科書[11]，也試著舉辦多場教師研習討論會。

### VIII. 致謝

我非常感謝許多物理學家給予許多非常有幫助的想法，特別是 James Smith、Lynell Cannell、Dennis Kane、James Wolfe、Donald Shirer，以及 Howard McAllister。我也同樣感謝在工程學界的同事，Cristino Cusano 以及 Daniel Drucker。我也非常感謝許多跟我一

起奮力掙扎的同學們，陪著我摸索許多新的教學方法。

### IX. 後記

在 Bruce Sherwood 教授的網誌中 (brucesherwood.net/?p=134)，有提到當時發表這篇論文的一些歷史。在 1984 年發表的〈動摩擦力的做功與熱傳分析〉之前，已經發表了更基礎的〈假功與真功〉論文（也就是這篇文章），但因為這篇文章相當於否定了主流的解題方法，所以最初是被美國物理期刊退件的。不過，最後 AJP 當然還是勉強接受並發表了教授這兩篇文章。值得一提的是，在發表〈動摩擦力的做功與熱傳分析〉之前，Bruce Sherwood 教授也有將他對摩擦力做功的常見教法的觀點，與相當著名的普通物理學參考書作者 Halliday 與 Resnick 分享。後來，Halliday 回信說：

Let me say at once that we are well aware of its serious flaws, along precisely the lines that you describe. We have tried several times to patch things up in successive printings but the matter runs too deep for anything but a total rewrite. We have, in fact, such a rewrite at hand, awaiting a possible next edition.

我們非常清楚你所描述的這些錯誤。我們嘗試過許多方法，試著在接下來的版本中修正這些錯誤。但這實在太過繁雜，以至於幾乎要完全重寫（功與能量的部分）。事實上，我們手邊已有些修訂後的草稿，或許會於下個版本修正好這一切。

有點遺憾的是，Bruce Sherwood 教授也提到，到目前 (June 24, 2017) 為止，他還沒看到 Halliday 於其新版著作中的任何修改。在 matterandinteractions.org，Bruce Sherwood 教授於 Articles & Talks 頁面的“Bringing atoms into first-year physics”文章中，針對可形變系統的教學方法提出非常重要的修改與調整建議。有興趣的讀者可前往瀏覽。

[1] H. Erlichson, Am. J. Phys. **45**, 769 (1977).

[2] C. Pechina, Am. J. Phys. **46**, 295 (1978).

[3] 譯者註：此處的功能方程式誤用現象，相當於台灣誤用「功能定理」一詞的現象。我們經常將只處理質心運動的質心方程式，誤稱為與能量有關的「功能定理」。而真正的功能定理，其實是恰好只涉及一種能量傳遞管道——純粹力學的——的能量定律（熱力學第一定律）。

[4] B. A. Sherwood, C. Bennett, C. Tenczar, and J. Mitchell, *Proceedings of the Conference on Computers in the Undergraduate Curricula* (Dartmouth College, Hanover, NH, 1971).

[5] S. Smith and B. A. Sherwood, Science **192**, 344 (1976). Reprinted in *Electronics: The Continuing Revolution*,

edited by P.H. Abelson and A. L. Hammond (American Association for the Advancement of Science, Washington, DC, 1977).

[6] D. Kane and B. Sherwood, Comp. and Educ. **4**, 15 (1980).

[7] L. M. Jones, D. Kane, B. A. Sherwood, and R. A. Avner, Am. J. Phys. **51**, 533 (1983).

[8] D. Halliday and R. Resnick, *Fundamentals of Physics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1981).

[9] B. A. Sherwood (unpublished).

[10] B. A. Sherwood, Am. J. Phys. **39**, 1199 (1971).

[11] B. A. Sherwood, *Notes on Classical Mechanics* (Stipes, Champaign, IL, 1982).